

Serie 1

Aufgabe 1. Aus Ihrer Jugendzeit ist Ihnen vielleicht bekannt, wie man mit “Schere-Stein-Papier” etwas ausknobelt. Beide Spieler formen mit der Hand eines dieser Symbole. Dabei schlägt der Stein (\circ) die Schere (\times), die Schere das Papier (\square) und das Papier den Stein. Bei gleichen Symbolen ist das Spiel unentschieden. Geben Sie (für ein einzelnes Spiel) eine geeignete Ergebnismenge an sowie die Ereignisse

1. Spieler 1 gewinnt
2. Spieler 2 gewinnt
3. Unentschieden.

Aufgabe 2. Aus einer Warensendung werden vier Artikel zur Prüfung auf Brauchbarkeit bzw. Unbrauchbarkeit herausgegriffen. Geben Sie eine geeignete Ergebnismenge sowie die folgenden Ereignisse an:

1. *A*: Das erste Stück ist unbrauchbar.
2. *B*: Das erste Stück ist unbrauchbar, alle anderen sind brauchbar.
3. *C*: Mindestens zwei Artikel sind brauchbar.

Aufgabe 3. Geben für folgende Probleme eine geeignete Ergebnismenge an. Formulieren Sie gesuchten Ereignisse als Teilmengen der Ergebnismenge. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse in einem sinnvollen Modell.

1. Würfeln mit einem Würfel, Ereignis “Augenzahl gerade”
2. Würfeln mit zwei Würfeln, Ereignis “Pasch”
3. Zweimaliges Werfen einer Münze, Ereignis “zweimal Kopf”
4. Zufälliges Ausfüllen eines Multiple-Choice Tests mit 4 Fragen à 2 Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine Antwort richtig ist, Ereignis: “Mindestens die Hälfte richtig”

Aufgabe 4. Berechnen Sie in einem sinnvollen Modell die Wahrscheinlichkeit, dass

1. beim Würfeln mit zwei Würfeln
 - (a) die Augensumme 7 oder 8 ist.
 - (b) keine 1 dabei ist.
 - (c) die 3 dabei ist.
2. in folgender Situation
 - (a) jeder
 - (b) niemand

sein eigenes Geschenk bekommt: Zu einer Weihnachtsfeier bringt jeder ein Geschenk mit. Die Geschenke werden verlost, so dass jeder genau ein Geschenk bekommt. Es nehmen 3 Leute an der Weihnachtsfeier teil.

Aufgabe 5. Entscheiden Sie mit Begründung, ob folgende Aussage richtig ist: Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln mindestens eine sechs zu würfeln ist doppelt so gross, wie mit einem Würfel eine sechs zu würfeln.

Aufgabe 6. Eine Pin bestehe aus den Zahlen $0, \dots, 9$. Wie lang muss die Pin sein, damit die Wahrscheinlichkeit, die Pin zu erraten (in einem Versuch) höchstens 1% beträgt?

Aufgabe 7. Wie viele Passwörter der Länge 4 gibt es, die nur aus Ziffern bestehen, wenn

1. die erste Zahl keine 0 sein darf?
2. keine 0 enthalten sein darf?
3. mindestens eine 0 enthalten sein muss?
4. die erste Zahl höchstens so gross wie die anderen Zahlen sein darf?

Aufgabe 8. Wie viele verschiedene Initialen aus Vor-, Mittel- und Nachname gibt es?

Aufgabe 9. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Sitzordnung von fünf Personen in einem PKW, wenn nur drei von ihnen einen Führerschein besitzen?

Aufgabe 10. Wie viele fünfstellige Dualzahlen beginnen mit 11 oder enden mit 00?

Aufgabe 11. Eine Postleitzahl in Österreich besteht aus vier Ziffern zwischen 0 und 9, wobei die erste Ziffer nicht 0 sein kann (sie klassifiziert das Bundesland; so steht zum Beispiel 1 für Wien oder 9 für Kärnten). Wie viele verschiedene Postleitzahlen sind nach diesem Schema möglich?

Aufgabe 12. Wie viele Variablennamen gibt es, die aus mindestens drei und höchstens fünf Kleinbuchstaben bestehen?

Aufgabe 13. Eine Logikfunktion $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ ordnet jeder n -Bit Zahl den Wert 0 oder 1 zu. Eine unvollständige Logikfunktion $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1, 2\}$ ordnet jeder n -Bit Zahl den Wert 0, 1 oder 2 zu (wobei 2 für "unbestimmt" steht).

1. Wie viele Logikfunktionen gibt es (für festes n)?
2. Wie viele unvollständige Logikfunktionen gibt es (für festes n)?

Aufgabe 14. IP-Adressen: Beim IP-Protokoll (Version 4) wird ein Rechner eindeutig durch seine IP-Adresse identifiziert (RFC 1166). Sie ist eine 32-Bit-Dualzahl. (Diese wird in der Regel durch vier 8-Bit-Zahlen in Dezimaldarstellung angegeben. Zum Beispiel hat der Webserver `www.technikum-wien.at` die IP-Adresse 193.170.255.25, die der Dualzahl

11000001.10101010.11111111.00011001

entspricht.) Die ersten n Bit der IP-Adresse sind die so genannte Netzwerk-ID und die restlichen $32 - n$ Bit die Host-ID. Bei Netzwerken der Klasse A hat die Netzwerk-ID 8 Bit, bei Netzwerken der Klasse B 16 Bit und bei Netzwerken der Klasse C 24 Bit. Die Adressen, die (dual) mit 0 beginnen, sind Klasse A-Netzwerke; Adressen, die mit 10 beginnen, sind Klasse B-Netzwerke; Adressen, die mit 110 beginnen, sind Klasse C-Netzwerke. (In unserem Beispiel handelt es sich also um ein Klasse C-Netzwerk.)

1. Wie viele Host-IDs können innerhalb eines Klasse A, B bzw. C Netzwerkes vergeben werden, wenn die Host-ID nicht aus lauter 0 oder 1 bestehen darf?
2. Wie viele Klasse A, B bzw. C-Netzwerke (d.h., Netzwerk-IDs) gibt es?
3. Wie viele Rechner können insgesamt nach diesem Schema adressiert werden? (Wir ignorieren hier, dass in der Praxis nicht alle Klasse A, B bzw. C-Netzwerke verfügbar sind.)

Aufgabe 15. ENIGMA: Ein monoalphabetisches Verschlüsselungssystem des Alphabets entspricht einer Permutation der 26 Buchstaben. (D.h. zwei Parteien einigen sich auf eine Tabelle mit zwei Spalten, wobei in der ersten Spalte die Buchstaben von **a** bis **z** stehen, und in der zweiten Spalte stehen diese Buchstaben in einer beliebigen Anordnung. Bei Verschlüsseln eines Textes wird nun jeder Buchstaben durch sein Pendant in der zweiten Spalte ersetzt und dann versendet. Der Empfänger kennt die Tabelle und kann die Verschlüsselung rückgängig machen.)

1. Wie viele verschiedene monoalphabetische Verschlüsselungssysteme gibt es?
2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn man nur Permutationen betrachtet, die keinen Buchstaben auf sich selbst abbilden und ihr eigenes Inverses sind (d.h. es kann mit der gleichen Permutation ver- und entschlüsselt werden)? Um welchen Faktor verringert sich die Anzahl der Möglichkeiten?

Man nennt solche Permutationen fixpunktfreie Involutionen: "fixpunktfrei" wegen $f(x) \neq x$ und "Involution" wegen $f(f(x)) = x$. Im zweiten Weltkrieg hat die Tatsache, dass die Alliierten die mit der Verschlüsselungsmaschine ENIGMA gesicherten Funksprüche der deutschen Wehrmacht geknackt haben, eine entscheidende Rolle gespielt. Die ENIGMA verschlüsselt mithilfe wechselnder Permutationen des Alphabets A–Z. In den Maschinen, die die Wehrmacht verwendet hat, sind aus Bequemlichkeit nur fixpunktfreie Involutionen verwendet worden. Das war einer der wesentlichen Schwachpunkte.

Aufgabe 16. Person K hat seine fünfstellige PIN vergessen, er weiss lediglich, dass Sie aus den fünf Ziffern 1,2,7,8,9 besteht, die Reihenfolge ist ihm entfallen. Er kann pro Minute 5 PINs testen. Wie lange braucht er im schlimmsten Fall, bis er die korrekte PIN findet? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er im ersten Versuch richtig rät?

Aufgabe 17. Wie viele Möglichkeiten gibt es, in einem Club aus 12 Mitgliedern einen Sprecher, einen Kassier und einen Protokollführer zu bestimmen? Dabei macht es einen Unterschied, wer Kassier, Sprecher bzw. Protokollführer wird und diese Aufgaben werden von drei Personen erfüllt.

Aufgabe 18. Aus acht Bildern sollen vier für eine Wanddekoration ausgewählt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, sie (nebeneinander) aufzuhängen, wenn ihre Reihenfolge a) von Bedeutung ist b) ohne Bedeutung ist.

Aufgabe 19. 1. Wie viele Möglichkeiten gibt es für fünf Personen, sich für ein Gruppenfoto in einer Reihe aufzustellen?

2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn der einzige Mann dieser Gruppe immer in der Mitte stehen soll?

Aufgabe 20. Personen a, b, c, d sollen auf einer Konferenz einen Vortrag halten. Wie viele verschiedene Reihenfolgen der Redner sind möglich, wenn

1. es keine Einschränkungen gibt,
2. a jedenfalls zuerst sprechen soll,
3. d nicht an letzter Stelle sprechen soll.

Aufgabe 21. Eine Münze wird fünf Mal geworfen, dabei entsteht eine Folge XXXXX von Köpfen K und Zahlen Z.

1. Wie viele verschiedene Folgen sind möglich?
2. Wie viele dieser Folgen haben genau drei K?
3. Wie viele der Folgen haben höchstens zwei K?
4. Wie viele haben mindestens zwei K?

Aufgabe 22. Für einen Fernsehbericht sollen unter 60 Studierenden (darunter sind zehn Studentinnen) drei interviewt werden.

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei Studierende auszuwählen (Reihenfolge unwesentlich)?
2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Dreiergruppe mit genau einer Studentin auszuwählen?

Aufgabe 23. Wie viele mögliche Tippreihen gibt es beim Lotto "6 aus 45" für:

1. keine richtige Zahl
2. 3 Richtige
3. 5 Richtige ohne Zusatzzahl
4. 5 Richtige plus Zusatzzahl

Hinweis: Auf einem Lottoschein können sechs Zahlen aus 45 möglichen angekreuzt werden. Bei der Ziehung werden sechs Zahlen und eine Zusatzzahl bestimmt (Reihenfolge ist dabei unwesentlich), die dann mit den angekreuzten Zahlen verglichen werden.

Aufgabe 24. Gegeben seien 3 grosse, 4 mittlere und 5 kleine Bücher. Die Bücher sind alle verschieden.

1. Auf wie viele Arten kann man die Bücher nebeneinander in den Schrank stellen?
2. Auf wie viele Arten kann man die Bücher in den Schrank stellen, wenn sie von links nach rechts aufsteigend der Grösse nach geordnet sein sollen?

3. Auf wie viele Arten kann man die Bücher in den Schrank stellen, wenn Bücher gleicher Grösse nebeneinander stehen sollen?

Aufgabe 25. Karl lädt sechs Gäste zu seiner Geburtstagsfeier ein. Als sie eintreffen begrüßen sich alle mit Handschlag. Wie viele Handschläge waren das insgesamt?

Aufgabe 26. Ein Passwort muss 6 Stellen lang sein. Wie viele Passwörter gibt es, wenn es

1. 6 Kleinbuchstaben enthalten muss, und die Kleinbuchstaben auch mehrfach im Passwort vorkommen können?
2. 6 verschiedene Kleinbuchstaben enthalten muss?
3. 5 Kleinbuchstaben und genau eine Ziffer enthalten muss?
4. 4 Kleinbuchstaben und genau 2 Ziffern enthalten muss?

Aufgabe 27. 1. Wie viele zehnstellige Dualzahlen gibt es?

2. Wie viele davon haben genau drei 0?
3. Wie viele davon haben höchstens zwei 0?
4. Wie viele davon haben mindestens zwei 0?

Aufgabe 28. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus den Buchstaben des Wortes "MISSISSIPPI" neue Wörter zu bilden (ein "Wort" ist hier irgendeine Permutation dieser 11 Buchstaben, also z. B. "ISSISIPPIMS").

Aufgabe 29. Eine Packung Krokuszwiebeln enthält 2 weisse, 2 violette und 2 gelbe Pflanzen; leider sind die Zwiebeln ununterscheidbar. Die Zwiebeln werden in einer Reihe gepflanzt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gleichen Farben jeweils nebeneinander wachsen?

Aufgabe 30. In einer Schachtel hat es 8 rote und 4 blaue Farbstifte. Ich nehme mit einem Griff 3 Stifte. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

1. Genau einer der Farbstifte rot ist?
2. mindestens ein Farbstift blau ist?

Aufgabe 31. In einem Skirennen sind unter den 15 Fahrerinnen der ersten Startgruppe 6 Schweizerinnen. Wie gross ist (bei zufälliger Auslosung) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Startnummern 1–4 alle an Schweizerinnen gehen?

Aufgabe 32. *Stuttgart (dpa/lsw).* Die Staatliche Toto-Lotto GmbH in Stuttgart hat eine Lotosensation gemeldet: Zum ersten Mal in der 40jährigen Geschichte des deutschen Zahlenlotos wurden zwei identische Gewinnreihen festgestellt. Am 21. Juni dieses Jahres [also in der 3016. Ziehung] kam im Lotto am Mittwoch in der Ziehung A die Gewinnreihe 15–25–27–30–42–48

heraus. Genau die selben Zahlen wurden bei der 1628. Ausspielung im Samstaglotto schon einmal gezogen, nämlich am 20. Dezember 1986. Welch ein Lottozufall: Unter den 49 Zahlen sind fast 14 Millionen verschiedene Sechserreihen möglich.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für diese Sensation, also dafür, dass in den ersten 3016. Ziehungen zweimal dieselbe Gewinnreihe gezogen wurde.